

Л. Шварц

Анализ

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л11 **Л. Шварц**
Анализ: Том 2 / Л. Шварц – М.: Книга по Требованию, 2023. – 534 с.

ISBN 978-5-8853-6534-5

Имя Лорана Шварца - одного из крупнейших математиков современности - хорошо известно советским специалистам. Его двухтомного курс существенно отличается от всех имеющихся книги по анализу. Изложение характеризуется глубоким взаимопроникновением методов классического и функционального анализа, современной алгебры и топологии. Следует отметить также блестящий стиль курса, умение автора выделить основное, объяснить значение тех или иных идей. Второй том посвящён дифференциальным уравнениям, внешним дифференциальным формам и функциям комплексного переменного.

ISBN 978-5-8853-6534-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Общее выражение для классов гомологии в Ω -A. Гомологичность нулю в Ω	292
Индекс цикла размерности $N-1$ относительно точки в ориентированном N -мерном аффинном пространстве	302
Инвариантность индекса при непрерывной деформации	304
Изменение индекса цикла при пересечении образа цикла	307
Приложение к вычислению индексов в различных областях пространства, определенных некоторым циклом	310
Классы вычетов коцикла с изолированными особенностями	313
Топологическая степень непрерывного отображения	314
Обобщение теории топологической степени	323
Глава VII. Функции комплексных переменных	325
1. Дифференцируемость относительно полей вещественных и комплексных чисел	325
Введение символов $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$	329
2. Элементарная теория голоморфных функций комплексной переменной. Интегральные формулы Коши	332
Первая основная интегральная формула Коши	333
Первообразная голоморфной функции	335
Вторая основная интегральная формула Коши	339
3. Следствия из второй интегральной формулы Коши	343
Обобщение неравенств Коши	347
Разложение в ряд Тейлора	350
Целые функции. Теорема Лиувилля	365
4. Мероморфные функции. Полюсы и существенно особые точки. Теория вычетов. Вычисление интегралов методом вычетов	372
Поведение функции в окрестности существенно особой точки	378
Сохранение вычетов дифференциальных форм при C^1 -диффеоморфизме	387
Поверхности Римана, сфера Римана, вычеты дифференциальных форм с изолированной особенностью	389
Формула для нулей и полюсов мероморфной функции	399
Обобщение на поверхности Римана	405
Первая проблема Кузена в комплексной плоскости	407
Важные частные случаи	410
Первая проблема Кузена на поверхности Римана	416

Вторая проблема Кузена в комплексной плоскости	419
5. Применение теоремы о вычетах к вычислению определенных интегралов	427
Приложение к вычислению сверток	434
Введение экспоненциальных множителей	438
6. Дополнение по общей топологии. Теоремы Асколи и Моптеля	455
Полуметрические пространства	455
Непрерывность и равномерная непрерывность	458
Равномерная структура. Липшицева структура	459
Последовательности Коши. Секвенциально полные пространства	461
Метризуемые полуметрические пространства	462
Ограниченные подмножества полуметрического пространства	463
Полунормированные векторные пространства	463
Ограниченные множества в топологическом векторном пространстве	475
Множества равностепенно непрерывных отображений и теоремы Асколи	477
Топологические дополнения. Теоремы Бэра и Баха-Штейнгауза	483
Свойства Мотеля	495
Дополнение о простой и равномерной сходимости ряда Фурье и интеграла Фурье	502
Сходимость интеграла Фурье	502
Сходимость ряда Фурье	509
Локальное поведение функции и сравнение сходимости ряда Фурье и интеграла Фурье	518
Предметный указатель	522

Предметный указатель

Алгебраический объем	- выходящий из области 172
параллелепипеда 103	Векторное поле 33
- телесный угол 286	- произведение векторов 106
Алгебраическое число обходов цикла	Вещественные гармонические
вокруг точки 302	сопряженные функции 332
- - покрытий точки 316	Внешнее произведение 88, 90
Альтернирующее отображение 82	- - дифференциальных форм 115
Аналитическая функция 351	- - мультилинейных
Антисимметризация отображения 81	антисимметричных форм 88
Антисимметричное отображение 80	- - - отображений 95
Априорная оценка 17	Внешняя алгебра 96
Вектор, входящий в область 172	

- первообразная дифференциальной формы 143
- теорема о вычетах 384
- p -форма 83
- Внутренняя теорема о вычетах 381, 383
- Вторая основная интегральная формула Коши 339
- проблема Кузена в комплексной плоскости 419
- теорема Асколи 481
- Вырожденный C^m -цикл 259
- - размерности n 259
- Вычет 376
- дифференциальной формы 387, 391
- функции в бесконечности 378, 384
- Гармоническая функция 330
- Голоморфное значение логарифма 336
- Гомотопия 268
- C^m -гомотопные отображения 268
- Градиент 135
- Граница 213
- C^m -граница 246
- Группа C^m -гомологии 266
- перестановок 78
- Детерминантная функция 84
- Дивергенция 135
- Дифференциальная форма степени p 110
- p -форма класса C^m 111
- Дифференциальная p -форма m раз дифференцируемая 111
- Дифференциальное уравнение, определенное векторным полем 34
- C -дифференцируемость 325
- R -дифференцируемость 329
- Замкнутая дифференциальная форма 134
- Звездное множество 271
- Индекс цикла 302

- Интеграл дифференциального уравнения 5
- дифференциальной формы 188, 202, 204, 205, 207, 245
- от коцикла по циклу 247
- Интервал безопасности 8
- Каноническая ориентация 101
- - R^2 206
- Касательная ориентация 175, 180
- Класс вычетов коцикла 313
- C^m -гомологии 263
- C^m -гомотопий 269
- когомологий 264
- Ковектор 83
- p -ковектор 83
- Когомологичные формы 264
- Кограница 245
- дифференциальной формы 128
- Компактификация по Александру 393
- Коориентируемые карты 155
- Коцикл 134, 245
- Край 213
- Криволинейный интеграл 207, 210
- Линейное дифференциальное уравнение 37
- - - со свободным членом 48
- - - с постоянными коэффициентами 58
- Липшицева структура 459
- Липшицево отображение 459
- Лист Мёбиуса 158
- Мероморфная функция 372, 377
- Метод вариации произвольных постоянных 49
- Метризуемое полуметрическое пространство 462
- Многообразие с краем класса C^m размерности n 213
- - особыми точками 206
- - псевдокраем 215

Множество функций, равномерно
 равностепенно непрерывное
 478
 Множество функций, равностепенное
 липшицево 478
 Множитель Вейерштрасса 425
 Мультилинейное альтернирующее
 отображение 78
 Направленное семейство 456
 Неориентируемое многообразие 158
 Непрерывное значение логарифма
 336
 Неравенство Коши 346
 - - обобщенное 347
 Нечетная перестановка 80
 Нуль мероморфной функции 399
 Области, определенные множеством
 168
 Общая теорема Стокса 224
 Ограниченное множество 463, 475
 Односвязное топологическое
 пространство 281
 Окружение 460
 Операция взятия кограницы 134
 Ориентация многообразия 154
 - - коориентируемыми картами 155
 - - с помощью знака вещественных
 дифференциальных форм 157
 - - - непрерывных векторных полей
 155
 - псевдокрая 217
 Ориентированное векторное
 пространство 98
 - многообразии класса C^n
 размерности, n , 1, 154
 Ориентируемость комплексного
 многообразия 161
 Особая часть множества 206
 Особый цикл 218
 Относительный максимум в широком
 смысле 356
 - минимум в широком смысле 356
 Отображение, гомотопное нулю 276

- локально обладающее свойством
 Липшица 8
 - удовлетворяющее условию
 Липшица 459
 Первая основная интегральная
 формула Коши 333
 - проблема Кузена 408, 416
 - теорема Асколи 479
 Первообразная голоморфной
 функции 335
 Первый интеграл 31
 Поверхность Римана 389
 Поле, локально удовлетворяющее
 условию Липшица 34
 Положительный класс R -базисов 101
 Положительный класс
 трансверсальных векторов 174
 Полуметризуемое пространство 457
 Полуметрическая структура простой
 сходимости 467
 - - равномерной сходимости 471
 Полуметрические структуры,
 эквивалентные по Липшицу 459
 Полуметрическое пространство 456
 Полунорма 463
 Полунормированное пространство
 464
 Полуполное пространство 462
 Полукасание 455
 Полус мероморфной функции 399
 - порядка m 376, 378, 391
 Порядок нуля 390
 Последовательность Коши 461
 Потенциал векторного поля 238
 Поток векторного поля 239
 Преобраз дифференциальной формы
 120
 Простая сходимость 502
 Пространство Бэра 483
 Прямой образ дифференциальной
 формы 121
 Псевдограница 215
 Псевдомногообразие 206
 Работа векторного поля 237

Равномеризируемое пространство 461
 Равномерная структура 459
 Равномерно непрерывное
 отображение 458, 461
 Равностепенное непрерывное
 множество 477, 478
 - непрерывные функции 477, 478
 Разбиение пространства на области
 168, 172
 Разложимая форма 91
 Разрешающий оператор 44
 Регулярная точка 307, 376, 378
 - часть множества 206
 Регулярное дифференциальное
 уравнение 7
 Резольвента 44
 Решение дифференциального
 уравнения 5
 Род поверхности Римана 417
 Ротор 137
 Ряд Лорана 373
 Свертка 434
 Свойство, выполняющееся В-почти
 всюду 485
 - Монтеля 495
 - устойчивости 77
 Секвенциально полное пространство
 462
 Сигнатура 79
 Симметризация отображения 81
 Симметричное отображение 80
 Система интервала и шара
 безопасности 8
 - ориентации многообразия 151
 - - - непрерывная в точке 153
 - - - на части многообразия 153
 - трансверсальных ориентации
 гиперповерхности 163
 - - - непрерывная в точке 163
 Скалярное дифференциальное
 уравнение 41, 51, 68, 71
 Сложение циклов 258
 Смешанное произведение векторов
 104

Спектр 367
 Структура компактной сходимости
 471
 - равномерной сходимости 470
 Существенно особая точка 376
 Сфера Римана 393
 Сходящаяся последовательность 461
 Телесный угол 285
 Теорема Адамара 425
 - Банаха-Штейнгауза 485
 - Вейерштрасса 369, 379, 419
 - Гельфанда 367
 - Даламбера 318, 358, 366
 - де Рама 250
 - Коши 9
 - Лиувилля 366
 - Мазура-Улама 369
 - Миттаг-Леффлера 408
 - Монтеля 497
 - Мореры 345
 - о вычетах 381, 427
 - - среднем 355
 - - строгом максимуме 349
 - Пикара 380
 - Пуанкаре 144
 - Руше 317
 - Стокса 218
 - существования и единственности 8
 - Хёвисайда 73
 - Шаудера о неподвижной точке 321
 Топологическая степень 323
 - - отображения в точке 314
 Топологическое дополнение 483
 - пространство n -связное 283
 Топология компактной сходимости
 471, 472
 - простой сходимости 466
 - равномерной сходимости 470
 Точки, близкие порядка $\mathcal{O}$ 460
 Тощее множество 485
 Трансверсальная ориентация
 гиперповерхности 172
 - - с помощью непрерывных полей
 нормальных векторов 164

Трансверсально ориентированная
 гиперповерхность 162, 164
 - ориентируемая гиперповерхность
 164
 Третья теорема Асколи 489
 Упорядоченный базис 97
 Уравнение в вариациях 54
 - - полных дифференциалах 5
 Условие Коши 7
 - Коши-Римана 328
 Фильтрующееся семейство 456
 Форма степени p 83, 111
 p -форма 111
 Формула Грина 243
 - дополнения 448
 - Остроградского 241
 - Римана 236
 - Стокса 218, 219, 242
 Фундаментальная N -форма 103
 Функция К-аналитическая 352
 - аргумент 256
 - C^m голоморфная 332
 - p -листная 402

- Эйлера 451
 Характеристический корень 67
 Целая функция 365
 Цикл 218
 C^m цикл 246
 - C^m гомологичный нулю 259
 Циклы C^m -гомологичные 263
 Циркуляция поля 237
 Часть многообразия, n -мерно
 пренебрежимая 206
 Четная перестановка 80
 Число Бернулли 415
 Число инверсий перестановки 79
 Шар безопасности 8
 Эквивалентные полуметрические
 структуры 459
 - упорядоченные базисы 97
 Экспонента оператора 59, 61
 Экспоненциальный множитель 438
 Элементарная работа векторного
 поля 238
 - теорема Стокса 219

Дифференциальные уравнения

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Какие вопросы можно изучить, рассматривая дифференциальное уравнение вида

$$\vec{y}' = \vec{L}(x, y) \quad (V, 1; 1)$$

Пусть заданы открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал $|a, b|$ вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, открытое множество Ω аффинного нормированного пространства F^2) и *непрерывное* отображение $\vec{L}$ множества $|a, b| \times \Omega$ в $\vec{F}$. Выясним, существует ли на $|a, b|$ такая дифференцируемая функция $f: y = f(x)$ со значениями в Ω , чтобы для нее и ее производной функции имело место тождество

$$\vec{f}'(x) = \vec{L}(x, f(x)). \quad (V, 1; 2)$$

Согласно теореме о сложной функции, при такой постановке вопроса функция $\vec{f}$ всегда будет непрерывной, а, значит, функция f будет не только дифференцируемой, но и непрерывно дифференцируемой.

Функция, обладающая этими свойствами, называется *решением* или *интегралом* дифференциального уравнения.

В частном случае, когда F есть пространство $\mathbb{R}^n$, задание функции f равносильно заданию системы n скалярных функций $f_1, f_2, \dots, f_n$. Отображение $\vec{L}$ эквивалентно системе n

¹⁾ Значениями a и b могут быть $-\infty$ и $+\infty$, но тогда $|a, b|$ их не содержит и, следовательно, $|a, b| \subset \mathbb{R}$, а не $\bar{\mathbb{R}}$.

²⁾ Пространство F — аффинное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, но $|a, b|$ — это всегда интервал в $\mathbb{R}$; $\vec{f}'(x)$ есть производный вектор, т.е., согласно определению (III, 3; 1), это элемент из $\vec{F}$. Если заменить $\mathbb{R}$ аффинным нормированным пространством E , то мы получим *уравнение в полных дифференциалах*, обладающее существенно иными свойствами. Случай, когда E является полем комплексных чисел, будет изучен позже.

ференциальной системе:

$$\begin{aligned}\vec{g}'_0 &= \vec{g}_1, \\ \vec{g}'_1 &= \vec{g}_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \vec{g}'_{p-2} &= \vec{g}_{p-1}, \\ \vec{g}'_{p-1} &= L(x, g_0, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{p-1}).\end{aligned}\tag{V, 1; 7}$$

Эта система представляет собой дифференциальное уравнение, аналогичное рассматривавшемуся ранее уравнению, в котором пространство F заменено произведением $F \times \vec{F}^{p-1}$, а открытое множество Ω — множеством $\mathcal{U}$. Полагая $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{p-1}) = z$, мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\vec{z}' = \mathcal{L}(x, z),\tag{V, 1; 8}$$

где $z = g(x) = (g_0(x), \vec{g}_1(x), \dots, \vec{g}_{p-1}(x))$, а $\vec{\mathcal{L}}$ есть отображение $(x, (y_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{p-1})) \rightarrow (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{p-1}, L(x, y_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{p-1}))$ множества $|a, b| \times \mathcal{U}$ в $\vec{F}^p$.

Мы предполагали, что рассматриваемое дифференциальное уравнение *регулярно*, т. е. разрешимо относительно производной высшего порядка. На практике это часто не так, что приводит к многочисленным трудностям, и в частности к отсутствию решения или к существованию нескольких решений, соответствующих заданным начальным условиям. В теоремах, которые мы приведем в дальнейшем, *всегда* будет предполагаться, что уравнение разрешено относительно производной наивысшего порядка, т. е. всегда представлено в виде (V, 1; 1).

Для такого уравнения задание значения y_0 решения f в точке x_0 интервала $|a, b|$ называется *условием Коши*. Коротко говорят так: «условие Коши x_0, y_0 ». Если задано дифференциальное уравнение порядка p вида (V, 1; 4), то, учитывая, что оно может быть приведено к виду (V, 1; 1), можно условие Коши записать в виде значения $z_0 = (y_0, y_1, \dots, y_{p-1})$ функции $z = g(x)$ для $x = x_0$, т. е. значения функции f и ее производных порядков $1, 2, \dots, p-1$ в точке x_0 интервала $|a, b|$.

Пользуясь некоторыми условиями, относящимися к функции $\vec{L}$, докажем, что рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет, и притом единственное, решение, соответствующее заданному условию Коши.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Дадим прежде всего следующее определение.

Говорят, что ограниченный интервал $J = |x_0 - \alpha, x_0 + \beta|$, $\alpha, \beta > 0$, содержащийся в $|a, b|$, и замкнутый шар B с центром y_0 радиуса $R > 0$ (конечного или бесконечного), содержащийся в Ω , образуют интервал и шар безопасности для $\vec{L}$ относительно $x_0 \in |a, b|$, $y_0 \in \Omega$, если существует такое число $M \geq 0$ (конечное или бесконечное), что, с одной стороны, норма $\|\vec{L}(x, y)\|$ будет мажорироваться числом M на произведении $J \times B$, а с другой стороны, имеют место неравенства $\alpha \leq R/M$, $\beta \leq R/M$ ¹⁾. Система интервала и шара безопасности всегда существует. В самом деле, так как функция $\vec{L}$ предполагалась непрерывной, то можно выбрать интервал $J_1 = |x_0 - \alpha_1, x_0 + \beta_1|$ и шар B с центром y_0 радиуса R , такие, чтобы отображение $\vec{L}$ было ограниченным на $J_1 \times B$. Пусть M — граница $\|\vec{L}(x, y)\|$ в $J_1 \times B$. Выберем интервал $J = |x_0 - \alpha, x_0 + \beta|$, где α и β определены соотношениями $\alpha = \inf(\alpha_1, R/M)$, $\beta = \inf(\beta_1, R/M)$. Тогда J и B будут удовлетворять требуемым условиям.

Конечно, можно, если это потребуется по тем или иным причинам, заменить число R меньшим числом R' . Но тогда при выбранном R' будут снова определяться числа α' и β' . Таким образом, если J, B составляют систему безопасности и если $J' \subset J$ и $B' \subset B$, то J', B' не обязательно образуют систему безопасности, однако J', B такую систему образуют.

Мы будем говорить, что отображение $\vec{L}$ локально обладает свойством Липшица по y в $|a, b| \times \Omega$, если, каковы бы ни были точки x_0 из $|a, b|$ и y_0 из Ω , существуют такие окрестности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ этих точек и такое число $k \geq 0$, что для $x \in \mathcal{A}$, $y_1 \in \mathcal{B}$, $y_2 \in \mathcal{B}$ имеет место неравенство

$$\|\vec{L}(x, y_1) - \vec{L}(x, y_2)\| \leq k \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \quad (\text{V}, 2; 1)$$

В этом случае при заданных x_0 и y_0 можно, как и ранее, определить интервал безопасности J и шар безопасности

¹⁾ Только в этой главе мы позволяем себе полагать $R = +\infty$, чтобы при $B = F$ продолжать говорить о B как о шаре с центром y_0 . В этом случае можно положить $M = +\infty$. Числа α и β тогда могут быть произвольными, но конечными (интервал J должен быть ограниченным). В особом случае, когда точка x_0 совпадает с левым концом a (соответственно с правым концом b) интервала $|a, b|$, интервал безопасности будет иметь вид $[a, a + \beta]$, $\beta > 0$ (соответственно $[b - \alpha, b]$, $\alpha > 0$). Существенным является тот факт, что такой интервал безопасности является некоторой окрестностью точки x_0 в $|a, b|$. Мы больше не будем говорить об этих особых случаях. Если это потребуется, читатель сам внесет необходимые изменения.