

Н. Я. Виленкин

Индукция. Комбинаторика

Пособие для учителей

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
Н11

Н11 **Н. Я. Виленкин**
Индукция. Комбинаторика: Пособие для учителей / Н. Я. Виленкин – М.: Книга по Требованию, 2012. – 48 с.

ISBN 978-5-458-29665-6

Предлагаемая вниманию читателя книга адресована учителям математики старших классов и посвящена двум разделам школьного курса математики, а именно методу математической индукции и комбинаторике. Материал книги излагается на более высоком научном уровне и в большем объеме, чем это предусмотрено школьной программой, что будет способствовать вооружению учителя достаточно глубоким знанием преподаваемых вопросов. Рассмотрена связь метода математической индукции с аксиоматикой множества натуральных чисел, роль индукции в математике и т. д. Изложение комбинаторики ведется на теоретико-множественной основе, что отвечает современному подходу к этой области математики.

ISBN 978-5-458-29665-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Аналогично этому была построена аксиоматика арифметики, основанная на отношении *следовать за*. И здесь даже такие очевидные утверждения, как *сумма не меняется при перестановке слагаемых*, получили строгое доказательство, основанное на этой системе аксиом.

Однако дедукция не является единственным методом научного мышления. Уже в вычислительной математике не всегда удается строго доказать, что вычислительные процессы сходятся и их применимость обосновывается тем, что они дают, как правило, результаты, подтверждаемые практикой. Еще шире используется апелляция к наблюдению и опыту в таких науках, как физика, химия, биология. В них наряду с дедукцией широко используются индуктивные рассуждения. Слово *индукция* по-русски означает наведение, а *индуктивными* называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т. е. полученные путем заключения от частного к общему.

Например, мы каждый день наблюдаем, что Солнце восходит с востока. Поэтому можно быть уверенным, что и завтра оно появится на востоке, а не на западе. Этот вывод мы делаем, не прибегая ни к каким предположениям о причине движения Солнца по небу (более того, само это движение оказывается кажущимся, поскольку на самом деле движется земной шар). И тем не менее этот индуктивный вывод правильно описывает те наблюдения, которые мы проведем завтра.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. И хотя теоретическая механика основывается на трех законах движения Ньютона, сами эти законы явились результатом глубокого продумывания опытных данных, в частности законов Кеплера движения планет, выведенных им при обработке многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений. После опытов Майкельсона по измерению скорости света в движущейся среде оказалось необходимым уточнить законы физики, создать теорию относительности.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломаного, естественно было сформулировать аксиому: *для любых трех точек A, B и C выполняется неравенство $|AB| + |BC| \geq |AC|$* . Лежащее в основе арифметики понятие *следовать за* тоже появилось при наблюдениях за строем солдат, кораблей и другими упорядоченными множествами.

Не следует, однако, думать, что этим исчерпывается роль индукции в математике. Разумеется, мы не должны экспериментально проверять теоремы, логически выведенные из аксиом: если при выводе не было сделано логических ошибок, то они постольку

верны, поскольку истинны принятые нами аксиомы. Но из данной системы аксиом можно вывести очень много утверждений. И отбор тех утверждений, которые надо доказывать, вновь подсказывается индукцией. Именно она позволяет отделить полезные теоремы от бесполезных, указывает, какие теоремы могут оказаться верными, и даже помогает наметить путь доказательства. Как правило, справедливость теоремы сначала делается очевидной из опыта и наглядных соображений и лишь потом получает дедуктивное подтверждение. Лишь после того, как на многочисленных примерах убедились, что сумма чисел не изменяется при перестановке слагаемых, возникла потребность вывести это утверждение из аксиом арифметики.

Индуктивные рассуждения широко использовал в своих исследованиях по теории чисел член Петербургской Академии наук великий математик XVIII века Леонард Эйлер. Он писал: «Покажется немало парадоксальным приписывать большое значение наблюдениям даже в той части математических наук, которая обычно называется чистой математикой, так как существует распространенное мнение, что наблюдения ограничиваются физическими объектами, которые воздействуют на наши чувства... Однако в действительности, как я здесь покажу, приведя очень веские доводы, свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдения и открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы все еще не в состоянии доказать; только наблюдения привели нас к их познанию... Этот вид знания, которое подкрепляется только наблюдениями и все еще не доказано, следует тщательно отличать от истины; оно, как мы обычно говорим, приобретает индукцией. Однако мы видели случаи, когда простая индукция вела к ошибке. Поэтому мы должны проявлять большую осторожность, чтобы не принять за истинные такие свойства чисел, которые мы открыли путем наблюдения и которые подкрепляются одной лишь индукцией. В действительности мы должны пользоваться таким открытием, как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы должны научиться кое-чему полезному».

2. Полная индукция. Как отмечено в приведенном выше высказывании Л. Эйлера, индукция может привести и к ошибочным выводам. Например, французский математик XVII века Пьер Ферма, рассматривая числа

$$2^{2^1} + 1 = 5, 2^{2^2} + 1 = 17, 2^{2^3} + 1 = 257, 2^{2^4} + 1 = 65537,$$

пришел к выводу, что при любом натуральном значении n число $2^{2^n} + 1$ является простым. Проверить справедливость этого утверждения при $n = 5$ он не смог, так как не сумел выяснить, имеет ли число $2^{2^5} + 1$ нетривиальные делители. Но Эйлеру удалось показать, что это число делится на 641.

В теории чисел доказывается, что если p — простое число, то $2^{p-1} - 1$ делится на p . Но ни для одного из простых чисел, меньших 1000, $2^{p-1} - 1$ не делится на p^2 . Поэтому возникла гипотеза, что вообще ни для одного простого числа p число $2^{p-1} - 1$ не делится на p^2 . Однако оказалось, что $2^{1093-1} - 1$ делится на 1093^2 . Существуют примеры, когда число, опровергающее гипотезу, настолько велико, что найти его перебором практически невозможно. Например, первое значение n такое, что число $991n^2 + 1$ является точным квадратом, насчитывает 29 десятичных знаков. Поэтому, если бы кто-нибудь сформулировал гипотезу: *число $991n^2 + 1$ никогда не является точным квадратом*, то для опровержения этого утверждения ему пришлось бы перебрать столь много чисел, что это оказалось бы не под силу самой быстродействующей вычислительной машине (разумеется, опровергающее гипотезу число было найдено иным путем).

Из сказанного выше следует, что угаданный с помощью индукции результат подлежит дедуктивному доказательству. В некоторых случаях такое доказательство можно провести, разобрав конечное число случаев, исчерпывающих все возможности.

Например, чтобы доказать утверждение: *для любого правильного многогранника справедливо соотношение $B + P + G = 2$, где B — число его вершин, P — ребер и G — граней*, достаточно рассмотреть пять случаев: тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр — других правильных многогранников не существует. А для этих пяти случаев утверждение проверяется с помощью следующей таблицы:

Название	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Октаэдр	6	12	8
Куб	8	12	6
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

В самом деле, для всех пяти многогранников имеем $B + P + G = 2$.

Такой метод перебора конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называется *полной индукцией*. Несмотря на свое название, этот метод является на самом деле не индуктивным, а дедуктивным — применяя его, мы опираемся на общие положения логики, позволяющие расчленять общий случай на конечное число частных случаев и рассматривать их по отдельности.

3. Метод математической индукции. Метод полной индукции имеет весьма ограниченную область применимости в математике. Как правило, математические утверждения касаются бесконечного множества объектов (например, всех натуральных чисел, всех простых чисел, всех многогранников и т. д.), и перебрать все эти

объекты оказывается невозможным. Но существует метод рассуждения, заменяющий неосуществимый перебор бесконечного множества случаев доказательством того, что если данное утверждение истинно в одном случае, то оно окажется истинным и в следующем за ним случае. Такой метод рассуждения называется *математической индукцией* или рассуждением от n к $n + 1$.

Моделью математической индукции может служить следующее рассуждение: «Причиной кажущегося восхода Солнца на востоке является суточное вращение Земли вокруг оси. Если сегодня Солнце взошло на востоке, то через сутки Земля и Солнце снова окажутся в том же самом положении, и мы вновь будем наблюдать то же самое явление. Но тогда мы будем наблюдать его спустя еще сутки, а потом еще через сутки и таким образом увидим его каждое утро».

Неточность этого рассуждения заключается в том, что в нем не учитываются движение Земли по орбите, меняющее час восхода Солнца, изменение скорости вращения Земли и т. д. Но в математике такая схема рассуждения часто оказывается полезной. Будем, например, вычислять последовательные суммы нечетных чисел: 1 , $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$. Мы получим числа 1 , 4 , 9 , 16 , являющиеся квадратами натуральных чисел 1 , 2 , 3 , 4 . Можно ожидать, что, прибавив к сумме $1 + 3 + 5 + 7$ следующее нечетное число, 9 , получим квадрат числа 5 , т. е. 25 . И действительно, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Итак, мы делаем гипотезу, что для любого натурального числа n истинно равенство

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2. \quad (1)$$

Как уже отмечалось выше, последовательный перебор натуральных чисел не даст доказательства этой гипотезы, так как, сколько бы чисел мы ни проверили, всегда остается возможность, что среди оставшихся чисел есть такое, для которого равенство (1) не выполняется. Нам нужно провести рассуждение, которое было бы аналогом слов «через сутки Земля и Солнце окажутся в том же самом положении, и мы будем наблюдать то же самое явление». Иными словами, нам надо доказать, что если

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2, \quad (2)$$

то такое же равенство будет справедливо и при добавлении к левой части равенства следующего нечетного числа $2k + 1$ и одновременной замене правой части на $(k + 1)^2$, т. е.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2. \quad (3)$$

Итак, доказательство справедливости равенства (1) не только для чисел $n = 1, 2, 3, 4$, но и для всех натуральных чисел сводится к тому, чтобы доказать следующее утверждение: *если истинно равенство (2), то истинно и равенство (3)*. Равенство (3), истинность которого мы хотим доказать, можно переписать следующим образом:

$$[1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1.$$

Но, по предположению, квадратную скобку в левой части равенства можно заменить на k^2 . В результате получаем тождество $k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$.

Итак, равенство (1) истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ вытекает, что оно истинно и при $n = k + 1$. Но тогда из его истинности при $n = 1$ следует, что оно истинно при $n = 1 + 1 = 2$, а тогда оно истинно при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$ и вообще при всех натуральных значениях n .

Как и все доказательства методом математической индукции, проведенное рассуждение состоит из следующих частей:

1) на основе разбора нескольких частных случаев формулируется утверждение $T(n)$ ¹, в формулировку которого входит натуральное число n (среди этих частных случаев фигурирует и $n = 1$);

2) доказывается, что если утверждение $T(n)$ справедливо при $n = k$, то оно справедливо и при $n = k + 1$.

А после этого рассуждают так: так как данное утверждение истинно при $n = 1$, то оно истинно и при $n = 2$, но тогда оно истинно при $n = 3$, при $n = 4$ и вообще при всех натуральных значениях n .

В школе, к сожалению, не всегда придается должное значение первой части, т. е. обучению школьников искусству делать индуктивные предположения. При таком, более формальном подходе метод математической индукции становится лишь способом доказательства заранее сформулированных утверждений, а не завершающим этапом на пути к открытию новых истин. В этом случае доказательство начинают с того, что проверяют истинность утверждения $T(n)$ при $n = 1$.

4. Метод математической индукции и аксиомы Пеано. Как и в случае полной индукции, название *метод математической индукции* обманчиво — на самом деле этот метод является дедуктивным и дает строгое доказательство утверждениям, угаданным с помощью индукции. Таким образом, метод математической индукции является одной из форм математического рассуждения.

Выясним теперь основу этого метода. Проводя доказательства методом математической индукции, мы говорили: если утверждение справедливо для $n = 1$, то оно справедливо для $n = 2$, $n = 3$ и т. д., а значит, оно справедливо для всех натуральных значений n . При этом понятие натурального числа считалось само собой очевидным, не требующим разъяснения. Но в современной математике не допускается использование таких само собой очевидных понятий. Каждое понятие должно быть либо определено на основе ранее известных понятий, либо введено аксиоматически (т. е. путем указания высказываний, касающихся этого понятия, из которых логически выводятся все остальные его свойства).

¹ На языке математической логики $T(n)$ — предикат, заданный на множестве натуральных чисел.

Для арифметики такими исходными понятиями являются: *единица, натуральное число и следовать за*, а основными свойствами этих понятий — аксиомы, данные итальянским математиком Д. Пеано. Эти аксиомы таковы:

1) для каждого натурального числа n существует одно и только одно следующее за ним натуральное число. Это число принято обозначать n' ¹;

2) единица является натуральным числом, причем она не следует ни за каким натуральным числом;

3) ни одно натуральное число не следует за двумя различными натуральными числами;

4) если множество A содержит единицу и вместе с каждым числом k содержит следующее за ним число k' , то A содержит все натуральные числа.

Четвертую аксиому Пеано называют аксиомой математической индукции — именно на ней основан метод математической индукции. В самом деле, пусть высказывание $T(1)$ истинно, а из истинности высказывания $T(k)$ следует истинность высказывания $T(k + 1)$. Обозначим через A множество тех натуральных чисел, для которых истинно $T(n)$. По предположению $1 \in A$ (высказывание истинно при $n = 1$), а из $k \in A$ следует $k' \in A$ (если $T(n)$ истинно при $n = k$, то оно истинно и при $n = k' = k + 1$). Но в силу аксиомы (4) отсюда следует, что A совпадает с множеством всех натуральных чисел. Значит, $T(n)$ истинно для всех натуральных чисел n .

Приведем пример использования математической индукции для доказательства свойств натуральных чисел.

Для любого натурального числа n , кроме 1, существует предшествующее ему число m , т. е. такое число, что $m' = n$.

В самом деле, обозначим через A множество, получаемое объединением 1 и множества всех натуральных чисел, имеющих предшествующие числа. По построению множество A содержит 1. Далее, пусть $k \in A$. Тогда $k' \in A$, поскольку у k' есть предшествующий элемент k . Итак, $1 \in A$ и из $k \in A$ следует $k' \in A$. Поэтому A совпадает со множеством всех натуральных чисел. Это и значит, что все натуральные числа, кроме 1, имеют предшествующие. (Из аксиомы 3 следует, что такое предшествующее число единственно.)

Математическая индукция используется для определения сложения и умножения натуральных чисел, для доказательства свойств этих операций. На ее основе вводятся отношения *больше* и *меньше* и доказываются свойства этих отношений. Мы не проводим соответствующих доказательств, которые излагают в пединститутах. Поскольку в школьной математике операции над натуральными числами и их свойства изучают индуктивно — давать эти доказательства в начальной и даже в средней школе невозможно.

¹ Число n' , следующее за n , обозначают также $n + 1$.

Отметим еще одно важное свойство множества натуральных чисел, также доказываемое с помощью математической индукции.

В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьшее число.

Это утверждение называют свойством *полной упорядоченности* множества натуральных чисел. Из этого свойства вытекает следующее утверждение, эквивалентное аксиоме математической индукции, но иногда более удобное при проведении доказательств.

Если $T(n)$ истинно при $n = 1$, а из того, что оно истинно при всех $n < k$, следует, что оно истинно и при $n = k$, то $T(n)$ истинно для всех натуральных значений n .

В самом деле, обозначим через A подмножество натуральных чисел, для которых $T(n)$ ложно. Если это подмножество непусто, то оно содержит наименьшее число k . Этим числом не может быть 1, так как по условию $T(1)$ истинно. Значит, $k > 1$. Но поскольку k — наименьшее число, для которого $T(n)$ ложно, то для всех $n < k$ $T(n)$ истинно, а тогда по условию теоремы оно должно быть истинно и при $n = k$. Мы пришли к противоречию — одновременно оказалось, что $T(k)$ истинно и $T(k)$ ложно. Это противоречие показывает, что наше предположение (A не пустое множество) ложно. Значит, A — пустое множество, т. е. нет натуральных чисел, для которых $T(n)$ ложно. Это и означает, что $T(n)$ истинно для всех натуральных чисел n .

5. Метод математической индукции и вычисление сумм и произведений. По-видимому, естественным моментом введения метода математической индукции в школе могло бы оказаться изучение прогрессий и последовательностей. Прогрессии определяются *рекуррентными соотношениями*, т. е. соотношениями, позволяющими найти следующий член последовательности по одному или нескольким предыдущим ее членам. Арифметическая прогрессия задается рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, а геометрическая прогрессия — рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n q$. Иными словами, само определение этих прогрессий дается с помощью индукции от n к $n + 1$. Поэтому и большинство формул, относящихся к прогрессиям, было бы целесообразно выводить при помощи метода математической индукции.

Например, при выводе формулы общего члена арифметической прогрессии замечаем, что

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

Эти формулы позволяют предположить, что для любого натурального числа n истинно равенство

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \quad (1)$$

Докажем его с помощью математической индукции. При $n = 1$ оно истинно, поскольку и a_n и $a_1 + (n - 1)d$ при $n = 1$ равны a_1 .

Предположим теперь, что $a_k = a_1 + (k - 1) d$. Тогда

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1) d + d. \quad (2)$$

Равенство (2) можно переписать так:

$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1] d.$$

Полученное равенство является не чем иным, как равенством (1) при $n = k + 1$. Итак, равенство (1) истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ следует, что оно истинно и при $n = k + 1$. Значит, оно истинно при всех натуральных значениях n .

Точно так же доказывается, что общий член геометрической прогрессии выражается формулой

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Выведем теперь с помощью математической индукции формулы для сумм членов арифметической и геометрической прогрессий.

Для арифметической прогрессии имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + [a_1 + (n - 1) d] = na_1 + d[1 + 2 + \dots + (n - 1)].$$

Таким образом, нам надо вывести формулу для суммы $1 + 2 + \dots + (n - 1)$ первых $n - 1$ натуральных чисел. Обозначим сумму первых n натуральных чисел через s_n .

Имеем:

$$\begin{aligned} 2s_1 &= 2 \cdot 1 = 2, & 2s_2 &= 2(1 + 2) = 6 = 2 \cdot 3, \\ 2s_3 &= 2(1 + 2 + 3) = 12 = 3 \cdot 4, & 2s_4 &= 2(1 + 2 + 3 + 4) = \\ &= 20 = 4 \cdot 5. \end{aligned}$$

Этого достаточно, чтобы сделать предположение индукции: $2s_n = n(n + 1)$, т. е.

$$s_n = \frac{n(n + 1)}{2}. \quad (3)$$

Поскольку $s_1 = 1$, а $\frac{n(n + 1)}{2}$ при $n = 1$ тоже равно 1, то наше предположение истинно при $n = 1$. Пусть оно истинно при $n = k$, т. е. пусть

$$s_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= (1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = s_k + (k + 1) = \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Полученное равенство есть равенство (3) при $n = k + 1$. Пользуясь методом математической индукции, мы доказали формулу (3).

Таким образом, $s_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$, а потому

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + d[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = na_1 + ds_{n-1} = \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]. \end{aligned}$$

Так как $2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$, то эту формулу можно переписать следующим образом:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Аналогично выводится формула для суммы членов геометрической прогрессии. Сначала замечаем, что в силу формул сокращенного умножения имеем:

$$S_2 = b_1 + b_2 = b_1 + b_1q = b_1(1 + q) = b_1 \frac{q^2 - 1}{q - 1}$$

(мы считаем, что $q \neq 1$) и

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = b_1 + b_1q + b_1q^2 = b_1(1 + q + q^2) = b_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1}.$$

Поскольку и S_1 можно записать в виде $S_1 = b_1 = b_1 \frac{q - 1}{q - 1}$, то приходим к индуктивному предположению: $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Равенство

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + b_1q^k = b_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

позволяет сделать переход от k к $k + 1$. Предоставляем читателю самому провести детали доказательства.

Метод математической индукции позволяет выводить и формулы для многих других сумм. Выведем, например, с помощью этого метода формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (4)$$

При $n = 1$ обе части равенства (4) принимают значение 1. Таким образом, при $n = 1$ это равенство выполняется. Пусть равенство (4) истинно при $n = k$:

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1) + 1]}{6}. \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства является правой частью равенства (4) при $n = k + 1$. Итак, равенство (4) истинно при $n = 1$, а из его истинности при $n = k$ следует, что оно верно и при $n = k + 1$. Значит, в силу метода математической индукции оно истинно при всех значениях n .

Предоставляем читателю доказать равенство:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Иногда бывает, что тщательное изучение доказательства, полученного с помощью математической индукции, позволяет найти более короткое доказательство той же формулы. Равенства

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

приводят к индуктивному предположению:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \quad (5)$$

Поскольку $S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, то равенство (5) верно при $n = 1$. Пусть оно верно при $n = k$:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k+1}{(k+1)+1}, \end{aligned}$$

откуда в силу математической индукции получаем, что (5) верно при всех натуральных значениях n .

Центральным местом этого вывода явилось тождество

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},$$

т. е.

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Его можно непосредственно вывести следующим образом:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2) - (k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

А тогда равенство (5) проще доказывается так:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$