

**Р. Курант**

**Курс дифференциального и  
интегрального исчисления**

**Том 2**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
P11

**Р. Курант**  
P11 Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 2 / Р. Курант – М.: Книга по Требованию, 2013. – 689 с.

**ISBN 978-5-458-33897-4**

Книга представляет собой мастерски написанный крупным математиком курс математического анализа, адресуемый автором «будущим учителям и научным работникам в области математики, физики и других естественных наук, а также инженерам». Первый том был впервые издан на русском языке в 1931 г. Настоящий перевод первого тома содержит: дифференциальное и интегральное исчисление функций одного переменного, очерк теории функций нескольких переменных, дифференциальные уравнения простейших типов колебаний. В него включены многочисленные добавления автора, появившиеся в последующих изданиях на немецком и английском языках, в частности тщательно подобранные и систематизированные упражнения и задачи. Второй том посвящен главным образом дифференциальному и интегральному исчислению функций многих переменных. По сравнению с первым русским изданием, вышедшим в 1931 г., настоящий перевод содержит многочисленные добавления автора, появившиеся в последних изданиях на немецком и английском языках. Книга может служить учебным пособием по математическому анализу для студентов и преподавателей университетов, педагогических институтов и вузов.

**ISBN 978-5-458-33897-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



5. Умножение отображений и преобразований	165
6. Разложение произвольного преобразования на примитивные	167
7. Общая теорема об обращении преобразования и о системах неявных функций	170
9. Несколько слов о преобразованиях в пространстве $n$ измерений	174
Упражнения	175
§ 4. Приложения	177
1. Параметрическое задание поверхности	177
2. Линейный элемент поверхности	180
3. Понятие о конформном отображении	183
Упражнения	185
§ 5. Семейства кривых и семейства поверхностей; их огибающие	186
1. Понятие семейства кривых и семейства поверхностей	186
2. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства плоских линий	188
3. Примеры	191
4. Огибающая семейства поверхностей	197
Упражнения	199
§ 6. Максимумы и минимумы	200
1. Определяяе	200
2. Необходимые условия экстремума	202
3. Примеры	203
4. Условные экстремумы	207
5. Доказательство правила неопределенных множителей для условного экстремума функции двух переменных	209
6. Обобщение метода неопределенных множителей	211
7. Примеры	216
Упражнения	219
Дополнения к главе III	221
§ 1. Достаточные условия экстремума функции двух переменных	221
1. Постановка вопроса	221
2. Исследование квадратичной формы $Q(h, k)$	221
3. Достаточные условия максимума и минимума	223
4. Примеры	225
Упражнение	226

§ 2. Особые точки плоских кривых	226
Упражнения	229
§ 3. Особые точки поверхностей	229
§ 4. Связь между уравнениями движения жидкости в форме Эйлера и в форме Лагранжа	232
§ 5. Представление замкнутой кривой с помощью семейства ее касательных	233
Смешанные упражнения к главе III	235
<b>Глава IV. Кратные интегралы</b>	<b>238</b>
§ 1. Обыкновенные интегралы как функции параметра	238
1. Определения и примеры	238
2. Непрерывность и дифференцируемость интеграла как функции параметра	240
Упражнения	245
§ 2. Интеграл от непрерывной функции по плоской или пространственной области	246
1. Интеграл ко плоской области (двойной интеграл) как объем	246
2. Общей аналитическое определение двойного интеграла	247
3. Примеры	251
4. Обозначения, дополнения, основные правила	253
5. Свойства двойного интеграла, его оценка и теорема о среднем значении	254
6. Интегралы по трехмерным в многомерным областям (тройные и многократные интегралы)	257
7. Дифференцирование по области. Масса и плотность	258
§ 3. Приведение кратного интеграла к повторному обыкновенному интегралу	260
1. Двойной интеграл по прямоугольной области	260
2. Следствия. Изменение порядка интегрирования. Дифференцирование под знаком интеграла	263
3. Распространение результата на двумерные области более общего вида	265
4. Приведение тройного интеграла к повторному	269
Упражнения	270
§ 4. Преобразование кратных интегралов	270
1. Общая формула преобразования двойного интеграла к новым переменным	271
2. Преобразование $n$ -кратного интеграла к новым переменным	276

интегрирования	
Упражнения	277
§ 5. Несобственные кратные интегралы	278
1. Интеграл от функции, имеющей конечные разрывы	278
2. Кратный интеграл: от функции, обращающейся в бесконечность в изолированных точках	279
3. Интеграл от функции, обращающейся в бесконечность вдоль линии	282
4. Интеграл по бесконечной области	283
5. Заключительные замечания и некоторые дополнения	284
§ 6. Приложения к геометрии	286
1. Вычисление объема с помощью двойного интеграла. Примеры	286
2. Вычисление объема с помощью тройного интеграла. Объем в цилиндрических и сферических координатах	288
3. Площадь кривой поверхности	290
4. Площадь поверхности, заданной параметрическими уравнениями	294
Упражнения	296
§ 7. Приложения к физике	297
1. Статический момент и центр массы (центр тяжести)	297
2. Момент инерции	300
3. Физический маятник	302
4. Потенциал поля тяготения	304
Упражнения	308
Дополнения к главе IV	310
§ 1. Существование кратного интеграла	310
1. Понятие меры плоской и пространственной области	310
2. Теоремы о кусочно гладкой дуге плоской кривой и о кусочно гладком куске поверхности	314
3. Доказательство существования двойного интеграла от непрерывной функции	316
§ 2. Обобщенные формулы Гульдина. Полярный планиметр	317
1. Об одном преобразовании двойного и тройного интеграла	317
2. Обобщенная формула Гульдина для плоскости и для пространства. Полярный планиметр	319
§ 3. Объем и площадь в пространстве любого числа измерений	322
1. Площадь поверхности и интегрирование по поверхности в пространстве, число измерений которого больше трех	322

2. Площадь поверхности и объем единичного шара в $n$ -мерном пространстве	324
3. Обобщения. Параметрические представления	326
Упражнения	329
§ 4. Несобственные интегралы как функции параметра	329
1. Равномерная сходимость. Непрерывная зависимость интеграла от параметра	329
2. Интегрирование несобственных интегралов по параметру	332
3. Дифференцирование несобственных интегралов по параметру	333
4. Примеры	335
5. Вычисление интегралов Френеля	339
Упражнения	340
§ 5. Интеграл Фурье	341
1. Введение	341
2. Доказательство интегральной теоремы Фурье	343
§ 6. Интегралы Эйлера (гамма-функция и бета-функция)	346
1. Определение и функциональное уравнение гамма-функции	346
2. Выпуклые функции и их свойства	347
3. Теорема Бора	350
4. Представление гамма-функции в виде бесконечного произведения	353
5. Функция $\ln \Gamma(x)$ и ее производные	356
6. Формула дополнения	357
7. Бета-функция и ее функциональное уравнение	358
8. Связь между бета-функцией и гамма-функцией	359
Упражнения	361
§ 7. Дифференцирование и интегрирование нецелого порядка. Интегральное уравнение Абеля	362
§ 8. Замечание по поводу определения площади кривой поверхности	364
Смешанные упражнения к главе IV	366
<b>Глава V. Криволинейные интегралы. Интегралы по поверхности</b>	<b>368</b>
§ 1. Криволинейные интегралы	368
1. Определение криволинейного интеграла. Обозначения	368
2. Векторная запись криволинейного интеграла	370
3. Основные свойства	372
4. Механическое истолкование криволинейного интеграла	374

5. Криволинейный интеграл в поле градиента. Интегрирование полного дифференциала	375
6. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	376
7. Условие, при котором вектор поля является градиентом - условие интегрируемости выражения $F_1 dx + F_2 dy$	378
8. Важность условия односвязности	383
Упражнения	384
§ 2. Связь между криволинейным и двойным интегралом на плоскости - интегральные теоремы для плоских векторных полей	384
1. Интегральная теорема Гаусса [теорема Остроградского для плоскости]	384
2. Векторная запись теоремы Гаусса	387
3. Теорема Стокса для плоскости	388
4. Формулы Грина	390
5. Двойной интеграл от якобиана	391
6. Преобразование плоского лапласиана к новым (в частности, полярным) координатам	392
§ 3. Наглядное истолкование интегральных теорем для плоскости и их приложения	393
1. Гидромеханическое истолкование теоремы Гаусса. Дивергенция и производительность источников	393
2. Интерпретация теоремы Стокса в роле скоростей и в силовом поле	396
3. Преобразование двойного интеграла	397
§ 4. Интеграл по поверхности	398
1. Интегрирование по ориентированной области	398
2. Определение интеграла по поверхности	405
3. Физическое истолкование интеграла по поверхности	407
§ 5. Интегральные теоремы Гаусса и Грина в пространстве	408
1. Теорема Гаусса в пространстве	408
2. Физический смысл теоремы Гаусса в пространстве	412
3. Теоремы Грина	414
4. Приложении теорем Гаусса и Грина в пространстве	414
Упражнения	416
§ 6. Теорема Стокса и пространстве	416
1. Формулировка и доказательство теоремы	416
2. Физический смысл теоремы Стокса	419

§ 7. Принципиальное соображение о связи между дифференцированием и интегрированием в пространстве многих переменных	421
Упражнения	424
Дополнения к главе V	425
§ 1. Замечания к теоремам Гаусса и Стокса	425
§ 2. Представление векторного поля, лишенного источников, в виде ротора	427
Упражнения	429
Смешанные упражнения к главе V	430
<b>Глава VI. Дополнительные сведения о дифференциальных уравнениях</b>	<b>435</b>
§ 1. Дифференциальные уравнения движения точки в пространстве	435
1. Уравнения движения	435
2. Закон сохранения энергии	437
3. Равновесие. Устойчивость	438
§ 2. Примеры из механики точки	440
1. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту	440
2. Малые колебания около положения равновесия	441
3. Движение планет	444
Упражнения	450
§ 3. Некоторые сведения из общей теории дифференциальных уравнений первого порядка	450
1. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка	451
2. Дифференциальное уравнение семейства кривых. Особые решения. Ортогональные траектории	454
3. Интегрирующий множитель	457
4. Теорема существования и единственности решения	459
5. Системы дифференциальных уравнений первого порядка и дифференциальные уравнения высшего порядка	462
6. Интегрирование с помощью степенного ряда (метод неопределенных коэффициентов)	463
Упражнения	465
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения любого порядка	468
1. Определение. Теорема существования и единственности решения. Принцип суперпозиции	468
2. Понятие линейной зависимости и линейной независимости системы функций	470

3. Необходимое условие линейной зависимости $n$ функций	472
4. Необходимое и достаточное условие линейной независимости $n$ решений ЛДУ $n$ -го порядка без правой части	474
5. Фундаментальные системы решений ЛДУ без правой части. Структура его общего решения	475
6. Частный случай ЛДУ второго порядка	478
Упражнения	479
7. ЛДУ $n$ -го порядка без правой части с постоянными коэффициентами	480
Упражнения	483
8. ЛДУ с правой частью и с переменными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных	483
9. Вынужденное движение простейшей колебательной системы	486
Упражнения	487
10. Определение частного решения по краевым условиям. Нагруженный канат и нагруженная балка	488
<b>§ 5. Потенциал гравитационного и электростатического поля. Уравнение Лапласа</b>	<b>493</b>
1. Потенциал непрерывного распределения массы или заряда	493
2. Двойной слой и его потенциал	495
3. Дифференциальное уравнение потенциала	496
4. Однородный двойной слой	497
5. Теорема о среднем значении	500
6. Краевая задача для окружности. Интеграл Пуассона	502
Упражнения	504
<b>§ 6. Дальнейшие примеры дифференциальных уравнений с частными производными</b>	<b>504</b>
1. Некоторые сведения о многообразии решений	505
2. Одномерное волновое уравнение	506
3. Волновое уравнение в трехмерном пространстве	508
4. Уравнения Максвелла в вакууме	510
Упражнения	512
<b>Глава VII. Элементы вариационного исчисления</b>	<b>514</b>
<b>§ 1. Введение</b>	<b>514</b>
1. Постановка задачи	514
2. Необходимые условия экстремума	518
Упражнения	520

§ 2. Дифференциальное уравнение Эйлера для простейшего случая	520
1. Вывод дифференциального уравнения Эйлера	520
2. Доказательства обеих лемм	523
3. Замечания по поводу интегрирования дифференциального уравнения Эйлера. Примеры	524
Упражнения	528
4. Случая, когда уравнение Эйлера обращается в тождество	528
§ 3. Обобщения	529
1. Функционалы, зависящие от многих функциональных аргументов	529
2. Важный частный случай. Примеры	531
Упражнение	533
3. Принцип Гамильтона. Уравнения Лагранжа	533
4. Функционалы, содержащие производные выше первого порядка	535
5. Функционал, имеющий вид кратного интеграла	536
6. Задачи с дополнительными условиями. Множитель Эйлера	538
Упражнение	540
Смешанные упражнения к главе VII	542
<b>Глава VIII. Функции комплексной переменной</b>	<b>544</b>
§ 1. Введение	544
1. Пределы и бесконечные ряды с комплексными членами	544
2. Степенной ряд	547
3. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда	548
4. Определение показательной функции, тригонометрических и гиперболических функций с помощью степенных рядов	551
Упражнения	552
§ 2. Основные понятия теории функций комплексной переменной	552
1. Требование дифференцируемости	552
2. Правила дифференцирования. Основные свойства показательной функции	555
Упражнение	557
3. Конформные отображения. Обратные функции	557
Упражнения	558
§ 3. Интегрирование аналитических функций	559
1. Определение интеграла	559
2. Теорема Коши	561

3. Приложения. Логарифм. показательная функция и общая степенная функция	563
Упражнения	567
§ 4. Интегральная формула Коши и ее приложения	568
1. Формула Коши	568
2. Разложение аналитической функции в степенной ряд	570
Упражнение	572
3. Теория аналитических функций и теория потенциала	573
Упражнение	573
4. Теорема, обратная теореме Коши	573
5. Нули, полюсы и вычеты аналитической функции	574
Упражнения	576
§ 5. Приложение к вычислению действительных определенных интегралов	577
1. Вывод формулы $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$	577
2. Доказательство формулы $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}a^2}$	578
3. Приложение теоремы вычетов к интегрированию рациональных функций	579
Упражнения	581
4. Теорема вычетов и линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	582
5. Доказательство формулы $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ с помощью теории вычетов	583
6. Многозначные функции и аналитическое продолжение	585
7. Пример аналитического продолжения. Гамма-функция	587
Смешанные упражнения к главе VIII	589
Сводка важнейших теорем и формул	592
<b>Ответы и указания</b>	<b>608</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>665</b>

Предметный указатель

Азимут 18	- функциональный 514
Аргумент 54	Аркус 544
- комплексного числа 544	Балка нагруженная 490

- Бета-функция 358, 595
- Вариация функции 519, 550
- Вектор 17
  - бинормальный 115, 603
  - единичный 18
  - касательный 106, 602
  - - единичный 106, 181, 602
  - кривизны 106
  - направляющий 25
  - нормальный главный 106, 603
  - - единичный 603
  - - к поверхности 151, 181, 603
  - равнопротивоположный 21
  - свободный 17
  - связанный 17
- Векторы линейно зависимые 50
  - - независимые 50
- Ветвь функции 58
- Вихрь 112
- Волна плоская 509
  - сферическая 509
- Вычет функции 575
- Вычисление действительных
  - определенных интегралов 577—581
  - объема 286
  - ошибок 84
- Гамма-функции 346, 594
  - - комплексной переменной 567, 587, 594
- Геодезическая линии 516
- Гиперболоид диуполостный 178
  - однополостный 178
- Градиент скалярного поля 110, 598
  - функции 110
- Граница области 119
- Движение планет 444
- Детерминант см. Определитель
- Дзета-функция Римана 568
- Диаметр множества 117
  - области 247
- Дивергенция векторного поля 112, 598
- Дискриминант квадратичной формы 222
- Дифференциал дуги 105, 180
  - сложной функции 90
  - функции 77
  - - полный 83
- Дифференцирование вектор-функции 597
  - интеграла по параметру 241, 593
  - кратного интеграла по области 258
  - несобственных интегралов по параметру 333
  - нецелого порядка 362
  - неявной функции 136, 141
  - обратной функции 163
  - под знаком интеграла 264
  - сложной функции 592
  - степенного ряда 549
- Дифференцируемость функции 74—78
  - - комплексной переменной 554
- Длина вектора 18, 597
  - дуги 604, 605
  - - пространственной кривой 105
  - физического маятника приведенная 303
- Зависимость интеграла от параметра
  - непрерывная 329, 331
  - системы функций линейная 470
- Задание плоской кривой неявное 144—149
  - поверхности неявное 150—152
  - - параметрическое 177
- Задача изопериметрическая 516
  - краевая 407, 488
  - - для круга внешняя 504
  - - - окружности 502
- Задача о брахистохроне 514, 527
  - - - в трехмерном пространстве 532
  - Плато 537
- Закон всемирного тяготения
  - Ньютона 444
  - площадей 447