

**Б.А. Розенфельд**

# **Многомерные пространства**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Б11

Б11 **Б.А. Розенфельд**  
Многомерные пространства / Б.А. Розенфельд – М.: Книга по Требованию, 2013. – 648 с.

**ISBN 978-5-458-51284-8**

Многомерная геометрия в настоящее время широко применяется в математике и физике для наглядного представления уравнений с несколькими неизвестными, функций нескольких переменных и систем с несколькими степенями свободы. Геометрический язык позволяет применить к решению сложных задач геометрическую интуицию, сложившуюся в нашем обычном пространстве. Однако, несмотря на постоянное применение идей многомерной геометрии в теоретических и прикладных вопросах, в русской математической литературе до сих пор отсутствует систематическое изложение геометрии многомерных пространств, и с основами многомерной геометрии можно познакомиться только по курсам линейной алгебры. Настоящая книга ставит своей целью заполнение этого пробела...

**ISBN 978-5-458-51284-8**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



|  |     |
|--|-----|
| § 3. Геометрия $m$ -плоскостей . . . . .   | 88  |
| 3.3.1. Уравнения $m$ -плоскости (88). 3.3.2. Операторные уравнения $m$ -плоскости (89). 3.3.3. Перпендикуляр, опущенный из точки на $m$ -плоскость (91). 3.3.4. Расстояние от точки до $m$ -плоскости (92). 3.3.5. Расстояние от точки до $m$ -плоскости, другая форма (93). 3.3.6. Отражение от $m$ -плоскости (94). 3.3.7. Отражение от $m$ -плоскости, другая форма (95). 3.3.8. Отражение от точки (96). 3.3.9. Взаимное расположение двух непересекающихся плоскостей (97). 3.3.10. Взаимное расположение двух пересекающихся плоскостей (99). 3.3.11. Вычисление размерности пересечения или общего направления двух $m$ -плоскостей (100). 3.3.12. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся $m$ -плоскостей (101). 3.3.13. Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися $m$ -плоскостями (103). 3.3.14. Расстояние между параллельными $m$ -плоскостями (104). 3.3.15. Стационарные углы между двумя $m$ -плоскостями (106). 3.3.16. Изоклинные и вполне перпендикулярные $m$ -плоскости (109). 3.3.17. Размерность многообразия $m$ -плоскостей (110). |     |
| Глава четвертая. Движения и аффинные преобразования . . . . .  | 111 |
| § 1. Аффинные преобразования . . . . .   | 111 |
| 4.1.1. Геометрические преобразования (111). 4.1.2. Аффинные преобразования (112). 4.1.3. Аффинные преобразования в координатах (119). 4.1.4. Центроаффинные преобразования и переносы (120). 4.1.5. Группа аффинных преобразований (121). 4.1.6. Задание аффинного преобразования (122). 4.1.7. Аффинные преобразования первого и второго рода (123). 4.1.8. неподвижные точки и инвариантные направления (126). 4.1.9. Преобразование родства (127). 4.1.10. Гомотетия (128). 4.1.11. Преобразование $m$ -родства (129).  |     |
| § 2. Движения . . . . .  | 130 |
| 4.2.1. Движения и когруэнтность (130). 4.2.2. Движения в координатах (131). 4.2.3. Вращения и переносы (131). 4.2.4. Группа движений (132). 4.2.5. Задание движения (133). 4.2.6. Движение первого и второго рода (134). 4.2.7. неподвижные точки и инвариантные направления (134). 4.2.8. Мнимые векторы (134). 4.2.9. Изотропные векторы (135). 4.2.10. Канонический вид матрицы ортогонального оператора (136). 4.2.11. Классификация вращений (140). 4.2.12. Стационарные углы поворота (141). 4.2.13. Паратактический поворот (142). 4.2.14. Классификация движений (143). 4.2.15. Представление движений в виде произведения отражений от плоскостей (145).  |     |
| § 3. Подобия . . . . .   | 149 |
| 4.3.1. Подобия и подобные фигуры (149). 4.3.2. Подобия в координатах (149). 4.3.3. Группа подобий (150). 4.3.4. Центр подобия (151). 4.3.5. Группа гомотетий и переносов (151).  |     |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава пятая. Многогранники</b>   | <b>153</b> |
| § 1. Прямолинейные отрезки  | 153        |
| 5.1.1. Лучи и отрезки (153). 5.1.2. Длина отрезка (153). 5.1.3. Ориентированные отрезки (156). 5.1.4. Отношение отрезков (157). 5.1.5. Деление отрезка в данном отношении (157). 5.1.6. Отношения отрезков при аффинных преобразованиях (158).  |            |
| § 2. Параллелепипеды  | 159        |
| 5.2.1. Полуплоскости и параллелепипеды (159). 5.2.2. Грани параллелепипеда (159). 5.2.3. Объемы (161). 5.2.4. Объем прямоугольного параллелепипеда (161). 5.2.5. Объем произвольного параллелепипеда (163). 5.2.6. Ориентированные $n$ -параллелепипеды (166). 5.2.7. Аффинность $n$ -параллелепипедов (167). 5.2.8. Объемы произвольных кубиремых фигур (167).   |            |
| § 3. Симплексы  | 169        |
| 5.3.1. Симплексы (169). 5.3.2. Грани симплекса (169). 5.3.3. Объем симплекса (170). 5.3.4. Ориентированные $n$ -симплексы (173). 5.3.5. Аффинность $n$ -симплексов (173). 5.3.6. Центр тяжести $n$ -симплекса (174). 5.3.7. Ортоцентрический $n$ -симплекс (176).   |            |
| § 4. Многогранники нулевого рода  | 178        |
| 5.4.1. Многогранники (178). 5.4.2. Призмы и пирамиды (178). 5.4.3. Выпуклые многогранники (181). 5.4.4. Многогранники нулевого рода (182). 5.4.5. Теорема Эйлера (185).   |            |
| § 5. Правильные многогранники   | 187        |
| 5.5.1. Правильные многоугольники и 3-многогранники (187). 5.5.2. Правильные $n$ -многогранники (190). 5.5.3. Центр правильного многогранника (191). 5.5.4. Характеристический симплекс правильного многогранника (192). 5.5.5. Классификация правильных $n$ -многогранников (193). 5.5.6. Правильный $n$ -симплекс (198). 5.5.7. Объем правильного $n$ -симплекса (201). 5.5.8. Правильный $n$ -параллелепипед или $n$ -куб (202). 5.5.9. Взаимные правильные $n$ -многогранники (203). 5.5.10. Многогранник, взаимный с $n$ -кубом (204). 5.5.11. Правильные 4-многогранники (207). 5.5.12. Симметрии правильных многогранников (210). 5.5.13. Правильные $(n - 1)$ -соты (213). |            |
| <b>Глава шестая. Сферы</b>  | <b>215</b> |
| § 1. Геометрия сфер   | 215        |
| 6.1.1. Сферы (215). 6.1.2. Уравнение сферы в координатах (217). 6.1.3. Сферы Аполлония (218). 6.1.4. Уравнение сферы по $n + 1$ точкам (219). 6.1.5. Сферы, описанные около многогранников (220). 6.1.6. Условие того, что $n + 2$ точек лежат на одной сфере (220). 6.1.7. Степень точки относительно сферы (222). 6.1.8. Взаимное расположение сферы и прямой (223). 6.1.9. Геометрический смысл степени точки относительно сферы (224). 6.1.10. Взаимное расположение сферы и $m$ -плоскости (225). 6.1.11. Касательная плоскость к сфере (225). 6.1.12.   |            |

|   |     |
|---|-----|
| Сферы, вписанные в многогранник (226). 6.1.13. Взаимное расположение двух сфер (227). 6.1.14. Пучок сфер (228). 6.1.15. Угол между сферами (230).   |     |
| § 2. Геометрия на сфере . . . . .   | 233 |
| 6.2.1. Большие и малые окружности и $m$ -сферы (233). 6.2.2. Сферические расстояния (233). 6.2.3. Сферическая теорема косинусов (234). 6.2.4. Сферическая теорема синусов (235). 6.2.5. Двойственная теорема косинусов (236). 6.2.6. Площадь сферического треугольника (237). 6.2.7. Координаты на сфере (238). 6.2.8. Сферические координаты в пространстве (241). 6.2.9. Элемент объема сферы (241). 6.2.10. Элемент объема в сферических координатах (242). 6.2.11. Объем сферы (242). 6.2.12. Объем шара (243).   |     |
| § 3. Сферические симплексы . . . . .  | 244 |
| 6.3.1. Сферические симплексы (244). 6.3.2. Грани сферического симплекса (244). 6.3.3. Многогранные углы сферического симплекса (245). 6.3.4. Альтернированная сумма углов симплекса (247). 6.3.5. Объем сферического симплекса (252). 6.3.6. Автополярный симплекс (252).   |     |
| § 4. Геометрия $m$ -сфер . . . . .  | 254 |
| 6.4.1. Уравнения $m$ -сфер (254). 6.4.2. Взаимное расположение двух $m$ -сфер (254).  |     |
| Глава седьмая. Квадрики . . . . .   | 256 |
| § 1. Общая теория квадрик . . . . .   | 256 |
| 7.1.1. Уравнения квадрики (256). 7.1.2. Взаимное расположение квадрики и прямой (257). 7.1.3. Асимптотические направления (258). 7.1.4. Центр симметрии (258). 7.1.5. Диаметральные плоскости и сопряженные направления (259). 7.1.6. Плоскости симметрии и главные направления (261). 7.1.7. Касательная плоскость (261). 7.1.8. Полярная плоскость и полюс (262). 7.1.9. Взаимное расположение квадрики и $m$ -плоскости (265).   |     |
| § 2. Классификация квадрик . . . . .  | 266 |
| 7.2.1. Собственные векторы симметрического оператора (266). 7.2.2. Приведение к центру (268). 7.2.3. Приведение к главным направлениям (268). 7.2.4. Приведение к взаимно сопряженным направлениям (269). 7.2.5. Классификация центральных квадрик (270). 7.2.6. Конусы (272). 7.2.7. Эллипсоиды и гиперboloиды (272). 7.2.8. Асимптотический конус (275). 7.2.9. Плоские образующие гиперboloидов (276). 7.2.10. Плоские образующие максимальной размерности (282). 7.2.11. Параболоиды (287). 7.2.12. Плоские образующие гиперболических параболоидов (289). 7.2.13. Вырожденные квадрики (292). 7.2.14. Обзор типов квадрик (295). |     |
| § 3. Аффинные преобразования и движения квадрик . . . . .   | 298 |
| 7.3.1. Аффинные преобразования квадрик (298). 7.3.2. Аффинное преобразование как произведение аффинного преобразования с симметрическим оператором и движения (299). 7.3.3.   |     |

Аффинные преобразования, переводящие квадрат в себя (300). 7.3.4. Эллиптические повороты (300). 7.3.5. Гиперболические повороты (302). 7.3.6. Параболические повороты (304). 7.3.7. Движения квадрат и метрические инварианты уравнений квадрат (306). 7.3.8. Инварианты при вращениях (308). 7.3.9. Инварианты при переносах (311). 7.3.10. Инварианты при произвольных движениях (312). 7.3.11. Исследование уравнений квадрат при помощи метрических инвариантов (312).

## Глава восьмая. Скользящие векторы . . . . . 318

### § 1. Скользящие векторы в пространстве . . . . . 318

8.1.1. Свободные и скользящие векторы (318). 8.1.2. Эквивалентные системы скользящих векторов (319). 8.1.3. Скользящие векторы на сфере (319). 8.1.4. Теоремы о скользящих векторах (322).

### § 2. Эквивалентность систем скользящих векторов . . . 325

8.2.1. Главный вектор и главный момент системы (323). 8.2.2. Главный момент системы скользящих векторов на сфере (324). 8.2.3. Главная ось системы (325). 8.2.4. Геометрический смысл оператора главного момента (326). 8.2.5. Собственные векторы кососимметрического оператора (329). 8.2.6. Каноническая система векторов (331). 8.2.7. Условие эквивалентности систем скользящих векторов (335).

## Глава девятая. Проективные преобразования . . . . . 336

### § 1. Проективное пространство . . . . . 336

9.1.1. Центральное проектирование (336). 9.1.2. Проективное  $n$ -пространство (337). 9.1.3. Проективные координаты точек (341). 9.1.4. Двойное отношение четырех точек (344). 9.1.5. Плоскости (347). 9.1.6. Уравнение плоскости по  $n$ -точкам (348). 9.1.7. Принцип двойственности (348). 9.1.8. Двойное отношение двух точек и двух плоскостей (349).

### § 2. Проективные преобразования . . . . . 351

9.2.1. Коллинеации (351). 9.2.2. Группа коллинеаций (354). 9.2.3. Задание коллинеации (355). 9.2.4. Проективные преобразования прямой (357). 9.2.5. Коллинеарное отображение  $n$ -пространств (358). 9.2.6. Неподвижные точки коллинеаций (358). 9.2.7. Корреляции (359).

### § 3. Конфигурационные теоремы . . . . . 362

9.3.1. Конфигурации (362). 9.3.2. Теорема Паппа (364). 9.3.3. Двойственная теорема Паппа (365). 9.3.4. Теорема Дезарга (365). 9.3.5. Теорема о полном четырехстороннике (368). 9.3.6. Теорема о полном четырехугольнике (369). 9.3.7. Гомологии (370). 9.3.8. Аффинные гомологии (372). 9.3.9. Перспективное отображение плоскостей (373). 9.3.10. Невырожденные  $m$ -гомологии (375). 9.3.11. Инволюционные коллинеации (376).

### § 4. Геометрия $m$ -плоскостей . . . . . 379

9.4.1. Пересечение и сумма  $m$ -плоскости и  $l$ -плоскости (379). 9.4.2. Проективные операторные координаты  $m$ -плоскости (379). 9.4.3. Проективные преобразования в проективных



операторных координатах (381). 9.4.4. Размерность пересечения  $m$ -плоскостей в проективных операторных координатах (381). 9.4.5. Проектирование на  $m$ -плоскость в направлении  $(n - m - 1)$ -плоскости (382). 9.4.6. Отражение от  $m$ -пары (383). 9.4.7. Двойное отношение двух  $m$ -пар (383). 9.4.8. Трансверсали двух  $m$ -пар (385). 9.4.9. Аффинные операторные координаты  $m$ -плоскостей (387). 9.4.10. Проективные преобразования в аффинных операторных координатах (389). 9.4.11. Размерность пересечения  $m$ -плоскостей в аффинных операторных координатах (390). 9.4.12. Двойное отношение двух  $m$ -пар (391).

## § 5. Квадрики . . . . . 391

9.5.1. Уравнения квадрики (391). 9.5.2. Взаимное расположение квадрики и прямой (394). 9.5.3. Касательная плоскость (395). 9.5.4. Полярная плоскость и полюс (395). 9.5.5. Полярное преобразование (396). 9.5.6. Плоские образующие квадрики (397). 9.5.7. Двойственность квадрики (398). 9.5.8. Упрощение уравнений квадрики (398). 9.5.9. Проективные свойства линий второго порядка и линейчатых квадрики (401). 9.5.10. Теоремы Паскаля и Бриансона (403). 9.5.11. Проективные преобразования квадрики (405). 9.5.12. Инволюционные корреляции (406). 9.5.13. Нулевые плоскости нуль-системы (408).

## Глава десятая. Дифференцирование векторов . . . . . 409

### § 1. Дифференцирование по скалярному аргументу 409

10.1.1. Векторные функции скалярного аргумента (409). 10.1.2. Дифференцирование и интегрирование векторных функций (411). 10.1.3. Векторные дифференциальные уравнения (413). 10.1.4. Касательная к линии (415). 10.1.5. Соприкасающиеся  $m$ -плоскости (416). 10.1.6. Сопровождающий базис (416). 10.1.7. Длина дуги (417). 10.1.8. Первая кривизна линии (418). 10.1.9. Формулы Френе (419). 10.1.10.  $(n - 1)$ -я кривизна линии (421). 10.1.11. Натуральные уравнения линии (421). 10.1.12. Операторные функции скалярного аргумента (423). 10.1.13. Инфинитезимальные движения (427). 10.1.14. Операторная запись формул Френе (431). 10.1.15. Винтовые линии (432).

### § 2. Дифференцирование по векторному аргументу 434

10.2.1. Скалярные функции векторного аргумента (434). 10.2.2. Векторные функции векторного аргумента (437). 10.2.3. Векторные уравнения поверхностей (439). 10.2.4. Касательная  $m$ -плоскость к  $m$ -поверхности (441). 10.2.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (441). 10.2.6. Первая квадратичная форма поверхности (443). 10.2.7. Элемент объема поверхности (443). 10.2.8. Пересечение касательной плоскости с поверхностью (444). 10.2.9. Кривизна линий на поверхности (445). 10.2.10. Линейный оператор поверхности (447). 10.2.11. Индикатриса Дюпена (449). 10.2.12. Главные кривизны (450). 10.2.13. Кривизны плоскости и сферы (452). 10.2.14.

|   |     |
|---|-----|
| $n$ -ортогональные системы поверхностей (452). 10.2.15. Полная кривизна поверхности (455). 10.2.16. Формулы Гаусса и Вейнгартена (456).   |     |
| § 3. Абсолютное дифференцирование . . . . .   | 458 |
| 10.3.1. Векторы и тензоры на поверхности (458). 10.3.2. Абсолютное дифференцирование (459). 10.3.3. Тензор кривизны (462). 10.3.4. Определение поверхности ее квадратичными формами (464). 10.3.5. Параллельный перенос (467). 10.3.6. Геодезическая кривизна линии (468). 10.3.7. Геодезические линии (469). 10.3.8. Кривизна поверхности в 2-мерном направлении (471). 10.3.9. Теорема Гаусса — Бонне (475). 10.3.10. Римановы пространства и пространства аффинной связности (477).  |     |
| Глава одиннадцатая. Конформные преобразования   | 480 |
| § 1. Конформное пространство и конформные преобразования . . . . .  | 480 |
| 11.1.1. Конформные преобразования (480). 11.1.2. Теорема Лиувилля (480). 11.1.3. Инверсия относительно сферы (482). 11.1.4. Конформное пространство (483). 11.1.5. Стереографическая проекция (485). 11.1.6. Конформные преобразования как произведения инверсий (488). 11.1.7. Проективная интерпретация конформного пространства (489). 11.1.8. Угол между сферами (491). 11.1.9. Группа конформных преобразований (493).   |     |
| § 2. Геометрия $m$ -сфер . . . . .  | 495 |
| 11.2.1. Операторное уравнение $m$ -сферы (495). 11.2.2. Стационарные углы между $m$ -сферами (495).   |     |
| § 3. Применение комплексных чисел и кватернионов  | 499 |
| 11.3.1. Алгебры (499). 11.3.2. Комплексные числа и кватернионы (500). 11.3.3. Плоскость комплексного переменного и пространство кватернионов (501). 11.3.4. Переносы и гомотетии (502). 11.3.5. Повороты (502). 11.3.6. Движения и подобия 2-плоскости (503). 11.3.7. Движения и подобия 4-пространства (504). 11.3.8. Движения 3-пространства (505). 11.3.9. Спинорное представление вращений 3-пространства (506). 11.3.10. Спинорное представление вращений 4-пространства (508). 11.3.11. Инверсии относительно окружностей и сфер (509). 11.3.12. Круговые преобразования 2-плоскости и конформные преобразования 4-пространства (510). 11.3.13. Двойное отношение четырех комплексных чисел или кватернионов (513). |     |
| Глава двенадцатая. Пространство и время . . . . .   | 517 |
| § 1. Пространство — время и псевдоевклидовы пространства . . . . .  | 517 |
| 12.1.1. Пространство — время классической механики (517). 12.1.2. Пространство — время специальной теории относительности (518). 12.1.3. Аксиомы псевдоевклидовых пространств (520). 12.1.4. Закон инерции (521). 12.1.5. Модели псевдоевклидовых пространств (522). 12.1.6. Расстояния между точками (523). 12.1.7. Изотропный конус (524). 12.1.8. Сферы (524).   |     |

|   |     |
|---|-----|
| 12.1.9. Углы между векторами (525). 12.1.10. Теорема косинусов (528). 12.1.11. Интерпретация многообразия евклидовых сфер на псевдоевклидовой сфере (528). 12.1.12. Интерпретация многообразия евклидовых сфер в псевдоевклидовом пространстве (529). 12.1.13. Прямоугольные координаты (531). 12.1.14. Прямые и плоскости (533).   |     |
| § 2. Псевдоевклидовы движения . . . . .   | 536 |
| 12.2.1. Движения и конгруэнтность (536). 12.2.2. Вращения и переносы (538). 12.2.3. Группа движений (538). 12.2.4. Канонический вид матрицы псевдоортогонального оператора (540). 12.2.5. Антидвижения (543). 12.2.6. Подобия и антиподобия (544).  |     |
| § 3. Конформные преобразования и псевдоконформное пространство . . . . .  | 545 |
| 12.3.1. Конформные преобразования (545). 12.3.2. Инверсия относительно сферы (546). 12.3.3. Псевдоконформное пространство (548). 12.3.4. Стереографическая проекция (549). 12.3.5. Интерпретация многообразия псевдоевклидовых сфер на псевдоевклидовой сфере (553). 12.3.6. Геометрия $m$ -сфер (553).   |     |
| § 4. Применение двойных чисел и антикватернионов . . . . .  | 554 |
| 12.4.1. Двойные числа и антикватернионы (554). 12.4.2. Плоскость двойного переменного и пространство антикватернионов (557). 12.4.3. Повороты и антиповороты (558). 12.4.4. Движения, антидвижения, подобия и антиподобия (560). 12.4.5. Круговые преобразования 2-плоскости и конформные преобразования 4-пространства (561). 12.4.6. Двойное отношение четырех двойных чисел или антикватернионов (564). 12.4.7. Сопряженные пары точек 2-плоскости (565). 12.4.8. Конформные преобразования псевдоевклидовой 2-плоскости (566). 12.4.9. Спинорные представления вращений 3-пространства (569). 12.4.10. Спинорные представления вращений 4-пространства (572). 12.4.11. Интерпретация многообразия прямых проективного 3-пространства в псевдоконформном 4-пространстве (577). |     |
| § 5. Геометрия и физика . . . . .   | 582 |
| 12.5.1. Псевдоримановы пространства (582). 12.5.2. Неевклидовы пространства (583). 12.5.3. Сложение скоростей в специальной теории относительности (585). 12.5.4. Плоская электромагнитная волна в специальной теории относительности (590). 12.5.5. Спинорное представление группы Лоренца и спин электрона (591). 12.5.6. Пространство — время общей теории относительности (594). 12.5.7. Квантовая физика и геометрия (596).  |     |
| Примечания . . . . .  | 598 |
| Библиография . . . . .  | 637 |

## Предисловие

---

Многомерная геометрия в настоящее время широко применяется в математике и физике для наглядного представления уравнений с несколькими неизвестными, функций нескольких переменных и систем с несколькими степенями свободы. Геометрический язык позволяет применить к решению сложных задач геометрическую интуицию, сложившуюся в нашем обычном пространстве. Однако, несмотря на постоянное применение идей многомерной геометрии в теоретических и прикладных вопросах, в русской математической литературе до сих пор отсутствует систематическое изложение геометрии многомерных пространств, и с основами многомерной геометрии можно познакомиться только по курсам линейной алгебры. Настоящая книга ставит своей целью заполнение этого пробела.

Шесть из первых восьми глав книги носят названия глав обычных учебников аналитической геометрии: «Векторы и аффинные операции над ними», «Метрические операции над векторами», «Прямые и плоскости», «Сферы», «Квадрики» и «Скользящие векторы». В этих главах изложена аналитическая геометрия  $n$ -мерного евклидова пространства. В основе изложения — аксиоматическое определение линейного, аффинного и евклидова пространств. В первых двух главах, помимо векторной алгебры, изложена алгебра тензоров и линейных операторов. В третьей главе, кроме геометрии прямых линий и  $(n - 1)$ -мерных плоскостей, излагается геометрия плоскостей любой размерности. Глава седьмая посвящена общей теории и классификации многомерных поверхностей второго порядка. В главе восьмой изложено многомерное обобщение геометрических теорем статики.

В главах «Движения и аффинные преобразования», «Многогранники» и «Сферы» изложено много материала, являющегося многомерным обобщением содержания курса элементарной геометрии. Здесь, в частности, изложены свойства движений и подобий, классификация движений, многомерная теорема Эйлера, многомерные правильные многогранники, геометрия сфер, измерение объемов и, в частности, объема многомерной сферы, сферическая геометрия и, в частности, геометрия сферического симплекса.

В главах «Движения и аффинные преобразования», «Проективные преобразования» и «Конформные преобразования» изложены основы многомерной аффинной, проективной и конформной геометрии, а в главе «Дифференцирование векторов» — основы дифференциальной геометрии линий и поверхностей многомерного пространства. Последняя глава «Пространство и время» посвящена псевдоевклидовой геометрии и ее применению к физическому учению о пространстве и времени.

При изложении применяется как синтетический метод, основанный на аксиомах и наглядных геометрических рассуждениях, так и аналитический метод, главным образом, векторный и операторный, в вопросах дифференциальной геометрии тензорный, в последних двух главах — основанный на применении комплексных чисел и кватернионов и их аналогов. Особенно следует отметить систематическое применение линейных операторов. Движения и преобразования подобия изучаются на основе теории ортогонального оператора. Многомерные плоскости и сферы задаются операторными уравнениями и все задачи, относящиеся к ним, решаются с помощью операторов, входящих в эти уравнения; в частности, через эти операторы выражаются метрические и проективные инварианты плоскостей и конформные инварианты сфер. Теория квадрик излагается на основе теории симметрического оператора, теория систем скользящих векторов — на основе теории кососимметрического оператора. С помощью операторов изучаются аффинные, проективные и конформные преобразования. В дифференциальной геометрии определяется оператор, являющийся производной векторной функции по векторному аргументу,

частный случай этого оператора — линейный оператор поверхности.

Книга рассчитана на студентов университетов и педагогических институтов, научных работников, учителей и инженеров, интересующихся геометрией.

Книга предполагает знакомство с курсами аналитической геометрии и высшей алгебры, а также с основными понятиями теории групп (в объеме первых глав «Теории групп» А. Г. Куроша). Дифференциально-геометрическая глава книги предполагает знакомство с курсом дифференциальной геометрии. Все понятия, связанные с тензорным анализом в книге, определяются, но для лучшего усвоения материала соответствующих разделов книги полезно предварительное знакомство с соответственными главами «Римановой геометрии и тензорного анализа» П. К. Рашевского.

Автор приносит глубокую благодарность А. П. Нордену и А. Ф. Лапко, прочитавшим эту книгу в рукописи, за ряд весьма полезных советов.